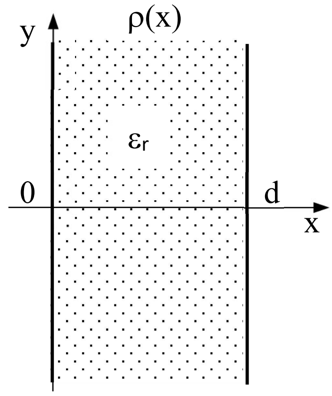
Esercizio n.1



Nello spazio limitato da due piani infiniti [x=0 e x=d] è presente una lastra piana di materiale dielettrico di costante dielettrica ε_r. Vedi figura.
Questa lastra è stata caricata con una densità di carica di volume $\rho(x)=ax$.
Si chiede:
A) Calcolare le espressioni analitiche del campo elettrico in tutto lo spazio.
B) Fare un grafico del campo elettrico in funzione della variabile x assumendo che $\varepsilon_r=2$ e scrivendo le espressioni del campo elettrico per x=0 e x=d.
C) Calcolare le espressioni analitiche del potenziale elettrostatico in tutto lo spazio assumendo un potenziale nullo in x=0.
D) Fare un grafico del potenziale elettrostatico in funzione della variabile x, scrivendo esplicitamente le espressioni del potenziale per x=0 e per x=d.

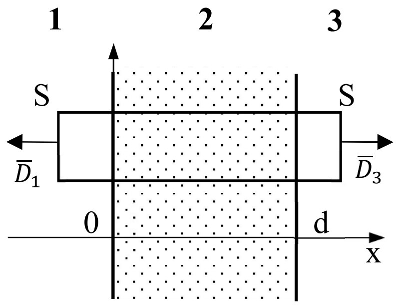
Per semplificare i calcoli ed i grafici si consiglia, dopo aver calcolato i campi elettrici, di utilizzare nelle formule una costante che potrebbe essere $\mathrm{E_0} = \frac{\mathrm{a\,d^2}}{4\varepsilon_0}$ o un'altra combinazione delle variabili del problema.

Dati: a>0 ; ε_r=2.

Soluzione

Nota generale: il problema è andato molto male per molte persone, anche se non presentava particolari difficoltà.
Gli errori in linea di massima sono stati questi:
- Di base andava utilizzato il teorema di Gauss, solo che molti hanno scelto dei volumi "impossibili".
- Per calcolare la carica in un certo volume va fatto l'integrale della densità di carica in tutto il volume.
- Per calcolare l'espressione del potenziale in una certa zona utilizzando l'espressione $\mathrm{V(x)} = -\int_c^x \mathrm{E_x}\,\mathrm{dx}$ l'estremo superiore dell'integrale deve essere la variabile x, non può essere una costante, altrimenti si calcola la differenza di potenziale.
- Molti hanno calcolato le espressioni del campo elettrico e del potenziale (giusti o sbagliati), ma poi hanno fatto dei grafici incoerenti con le formule: f(x)= ax è una retta per l'origine crescente ; f(x)=-bx + c è una retta decrescente che non passa per l'origine; f(x)= ax^2 + b è una parabola con la concavità verso l'alto; f(x) = - ax^2 + b è una parabola con la concavità verso il basso...
Questi errori sono molto gravi.

Consideriamo tre zone: la **1** con $x \le 0$; la **2** con $0 \le x \le d$; la **3** con $x \ge d$



A)

Zone 1-3) Il campo elettrico si può calcolare dal vettore D applicando il teorema di Gauss al cilindro di sezione S, lunghezza K e volume V1=S·K.
Sulle due superfici S il campo D è diretto verso l'esterno del cilindro, per simmetria. Quindi avremo:

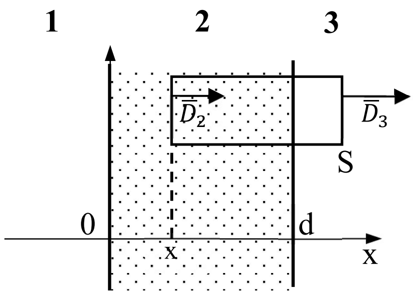
$$\phi(\overline{\mathrm{D}}) = 2\,\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{x}) \cdot \overline{\mathrm{S}} = 2\,\mathrm{D}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{S} = \mathrm{Q(interna)}$$

$$= \int_0^d \rho\,\mathrm{d}\tau = \int_0^d \mathrm{ax} \cdot \mathrm{S\,dx} = \frac{1}{2}\,\mathrm{ad^2S}$$

Da cui si ha che $\mathrm{D_{1,3}(x)} = \frac{\mathrm{a\,d^2}}{4}$ con direzione: $\hat{x}$ per x>d e $-\hat{x}$ per x<0

Il campo elettrico sarà quindi $\overline{\mathbf{E}}_{\mathbf{3,1}}(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{3,1}}(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\mathbf{a\,d^2}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\varepsilon_0}}(\pm)\hat{\mathbf{x}} = \pm\mathbf{E_0}\,\hat{\mathbf{x}}$

Avendo scritto $\mathrm{E_0} = \frac{\mathrm{a\,d^2}}{4\varepsilon_0}$



Zona 2) Si procede come sopra, ma il cilindro a cui applicare il teorema di Gauss avrà una parte dentro la zona carica ed una parte esterna.

Quindi scriveremo:

$$\phi(\overline{D}) = \overline{D_2}(x)\cdot\overline{S} + \overline{D}_3\cdot S = -D_2(x)\cdot S + D_3(x)\cdot S = Q(\text{interna}) = \int_x^d \rho(x)\,d\tau = \int_x^d ax\cdot S\,dx = \frac{1}{2}\,aS(d^2-x^2)$$

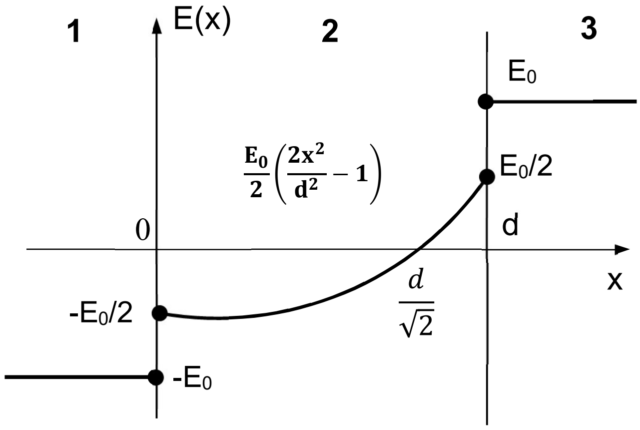
Da cui: $D_2(x) = D_3(x) - \frac{a}{2}(d^2-x^2) = \frac{a\,d^2}{4} - \frac{a}{2}(d^2-x^2) = \frac{a}{4}(2x^2-d^2) = \frac{ad^2}{4}\left(\frac{2x^2}{d^2}-1\right)$ in direzione $\hat{x}$

Ed il campo $E_2(x)$ sarà quindi: $\mathbf{\overline{E}_2(x)} = \frac{\overline{D}_2(x)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{ad^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{2x^2}{d^2}-1\right)\hat{x} = \frac{ad^2}{8\varepsilon_0}\left(\frac{2x^2}{d^2}-1\right)\hat{x} = \frac{E_0}{2}\left(\frac{2x^2}{d^2}-1\right)\hat{x}$

B) Le espressioni del campo elettrico per x=0 e per x=d saranno:

$$\overline{E}_1(0) = -E_0\,\hat{x} \quad ; \quad \overline{E}_2(0) = -\frac{E_0}{2}\hat{x} \qquad /// \qquad \overline{E}_2(d) = \frac{E_0}{2}\hat{x} \quad ; \quad \overline{E}_3(d) = E_0\,\hat{x}$$

Il grafico del campo E sarà quindi:



La curva che descrive il campo Elettrico nella zona **2** è una parabola con concavità verso l'alto e vertice in x=0.

C) Il potenziale elettrostatico si può calcolare dalla relazione: $V(x) = -\int_c^x E_x\,dx$ assumendo V(0)=0 e imponendo la continuità in x=0 e in x=d:

Zona 1) $V_1(x) = \int \frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}dx + c_1 = \frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}x + c_1$ $\quad V_1(0) = 0$ quindi $c_1 = 0$ $\qquad \mathbf{V_1(x)} = \frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}\mathbf{x} = \mathbf{E_0x}$ $\therefore$

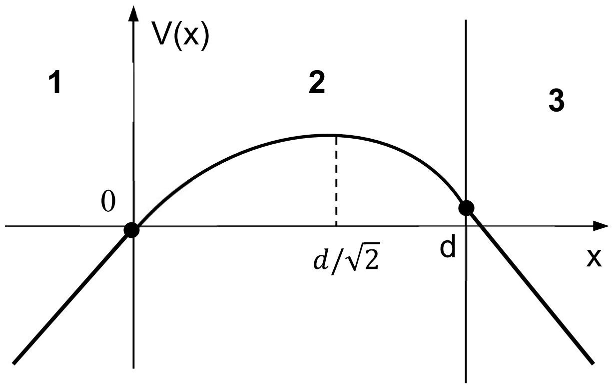
Zona 2) $V_2(x) = -\int\left[\frac{ad^2}{8\varepsilon_0}\left(\frac{2x^2}{d^2}-1\right)\right]dx + c_2 = \frac{a\,d^2}{8\varepsilon_0}\left(-\frac{2x^3}{3d^2}+x\right) + c_2$; imponendo $V_2(0) = V_1(0) = 0$

Si ha $c_2 = 0$ $\qquad \mathbf{V_2(x)} = \frac{a\,d^2}{8\varepsilon_0}\left(-\frac{2x^3}{3d^2}+\mathbf{x}\right) = \frac{E_0}{2}\left(-\frac{2x^3}{3d^2}+\mathbf{x}\right)$ $\therefore$

Zona 3) $V_3(x) = -\int\frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}dx + c_3 = -\frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}x + c_3$; imponendo la continuità in d: $V_2(d) = V_3(d)$ si ha:

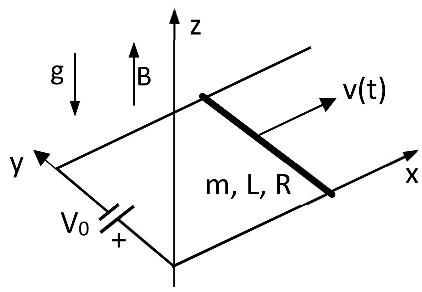
$\frac{a\,d^2}{8\varepsilon_0}\left(-\frac{2d}{3}+d\right) = -\frac{a\,d^3}{4\varepsilon_0} + c_3$; da cui: $c_3 = \frac{a\,d^3}{4\varepsilon_0}\frac{7}{6} = E_0 d\cdot\frac{7}{6}$

quindi: $\mathbf{V_3(x)} = -\frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}\mathbf{x} + \frac{a\,d^3}{4\varepsilon_0}\frac{7}{6} = \frac{a\,d^2}{4\varepsilon_0}\left(\frac{7}{6}\mathbf{d}-\mathbf{x}\right) = \mathbf{E_0}\left(\frac{7}{6}\mathbf{d}-\mathbf{x}\right)$ $\therefore$



Problema n. 2

Si consideri una sbarretta conduttrice lunga L, di massa m e resistenza elettrica R. Quest'asta può scorrere su due conduttori paralleli e orizzontali virtualmente infiniti (quindi posti nel piano xy), mantenendosi parallela all'asse y, con un coefficiente di attrito dinamico μ. Un generatore ideale di tensione mantiene una differenza di potenziale costante V_0 ai capi del circuito formato dall'asta e dalle due guide. Tutto il circuito è immerso in un campo magnetico B costante ed uniforme diretto secondo la verticale ed è immerso nel campo gravitazionale terrestre, diretto verso il basso.



La resistenza elettrica del circuito è determinata essenzialmente dalla resistenza R della sbarretta, tutte le altre essendo trascurabili. Si chiede:

A) Scrivere l'espressione di tutte le forze che agiscono sulla sbarretta.

B) Scrivere l'espressione e calcolare il valore della corrente elettrica i_r che scorrerà a regime, quindi nello stato stazionario, nel circuito.

C) Scrivere l'espressione e calcolare il valore della velocità v_r con cui la sbarretta si muoverà a regime la sbarretta.

Dati: L = 0,5 m ; m = 400 g ; R= 11 Ω ; μ = 0,5 ; V_0=24 V ; B = 2 T

Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%.

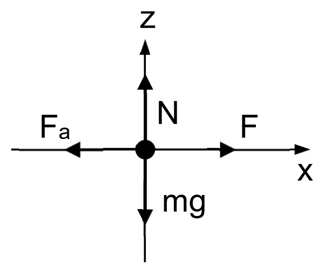
Soluzione

Il fenomeno è quello di una sbarretta libera di muoversi percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico. L'interazione fra corrente e campo magnetico crea una forza che tende a spostare la sbarretta. Quando la sbarretta si muove, dato che è soggetta anche alla forza di gravità, sarà sottoposta anche alla forza d'attrito dinamico. Le equazioni del moto saranno equivalenti a quelle di un moto con attrito costante in cui si raggiunge, per un tempo molto grande, una situazione stazionaria con velocità costante.

A) Le forze che agiscono sulla sbarretta sono: la forza peso $m\bar{g}$, la reazione normale delle guide $\bar{N}$, la forza d'attrito $\bar{F_a}$, e la forza e.m. $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{i}\,\overline{\mathrm{L}} \times \overline{\mathrm{B}}$. Vedi figura.

Le relazioni fra le varie forze sono:

$\overline{\mathrm{N}} = -\mathrm{m}\overline{\mathrm{g}}$; $\overline{\mathrm{F}}_\mathrm{a} = -\mu \cdot \mathrm{N}\,\hat{\mathrm{v}}$; $\overline{\mathrm{F}}_\mathrm{B} = \mathrm{i}\,\overline{\mathrm{L}} \times \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{i\,L\,B}\,\hat{\mathrm{x}}$



Nota: qualcuno ha scritto fra le forze [N] anche le forze elettromotrici [Volt], ed ha inserito queste forze nel bilancio delle forze meccaniche. Ma sono grandezze diverse!

B) A regime la velocità della sbarretta sarà costante, quindi la risultante delle Forze in direzione x sarà nulla:

$$\overline{\mathrm{F}}_\mathrm{B} + \overline{\mathrm{F}}_\mathrm{a} = 0 \quad \text{quindi:} \quad \mathrm{i}_r\,\mathrm{LB} = \mu\,\mathrm{mg}$$

Da cui si ha:

$$\mathrm{i_r} = \frac{\mu\,\mathrm{mg}}{\mathrm{LB}} \cong \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 10}{0{,}5 \cdot 2} \cong 2\ \mathrm{A} \quad \text{(valore esatto 1,96 A)}$$

C) Il circuito sarà equivalente ad una maglia con due generatori di tensione, il generatore di f.e.m. V_0 e il generatore di f.e.m. indotta f_{em} di verso contrario a V_0

L'equazione del circuito sarà quindi: $V_0 - f_{em} = Ri(t)$ dove: $|f_{em}| = \frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt}(B \cdot S) = \frac{d}{dt}(B \cdot L \cdot x(t)) = B \cdot L \cdot v(t)$

A regime le grandezze del moto sono costanti, quindi v(t)=v_r e i(t)=i_r , avremo quindi:

$$V_0 - f_{em}^r = Ri_r \quad ; \quad V_0 - BLv_r = Ri_r \quad \text{da cui: } v_r = \frac{V_0 - Ri_r}{BL} \cong \frac{24 - 11 \cdot 2}{2 \cdot 0{,}5} \cong 2 \text{ m/s} \quad \text{(valore esatto 2,44 A)}$$

Metodo alternativo:

A regime la potenza erogata dal generatore andrà in parte in dissipazione termica nella resistenza R ed in parte in calore dissipato per attrito. In formule.

$P_{gen} = P_{Joule} + P_{attrito}$ quindi: $V_0 \cdot i_r = Ri_r^2 + F_a \cdot v_r$

Da cui: $v_r = \frac{V_0 \cdot i_r - Ri_r^2}{\mu\, mg} = \frac{V_0 - R \cdot i_r}{\mu\, mg} i_r = \frac{V_0 - R \cdot i_r}{\mu\, mg} \cdot \frac{\mu\, mg}{LB} = \frac{V_0 - Ri_r}{BL}$ che ovviamente coincide con il risultato calcolato precedentemente.

Si poteva anche calcolare prima la velocità a regime e poi la corrente, i calcoli sono leggermente più complicati, ma il risultato ovviamente è lo stesso.

Era invece inutile scrivere le due equazioni: quella del moto e quella del circuito, risolverle, calcolare la velocità e la corrente in funzione del tempo e calcolarle per un tempo molto grande.

È giusto, ma lungo e più complicato perché fornisce tutto l'andamento in funzione del tempo della velocità e della corrente.